



Zestaw 7

GIMNAZJUM

1. Ciąg Fibonacciego określony jest następująco: dwa pierwsze wyrazy są równe 1, a każdy następny jest sumą dwóch poprzednich.

$$F_1 = F_2 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Ustal, czy liczba F_{2016} jest parzysta.

2. Podaj wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich spełniających równanie

$$201n + 6m = 2016$$

3. Czy istnieje trójkąt prostokątny, którego jeden z boków ma długość 2016, a długości pozostałych boków wyrażają się liczbami całkowitymi?

LICEUM

1. Wiadomo, że

$$\frac{-a + b + c}{a} = \frac{a - b + c}{b} = \frac{a + b - c}{c}$$

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$

2. W pewnym turnieju wzięło udział n drużyn ($n > 2$). Każda drużyna rozegrała z każdą dokładnie jeden mecz i nie zanotowano remisów. Udowodnij, że jeżeli pewne dwie drużyny wygrały tę samą ilość meczów, to znalazły się takie trzy drużyny A, B, C, że drużyna A wygrała z drużyną B, drużyna B wygrała z drużyną C, drużyna C wygrała z drużyną A.

3. W koło wielkie kuli o promieniu r wpisano kwadrat. Wykaż, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu P powierzchni kuli od wierzchołków kwadratu jest równa $8r^2$.