



## Zestaw 11

---

### GIMNAZJUM

1. Udowodnij, że jeżeli liczby całkowite  $a, b, c$  spełniają równość  $a^2 + b^2 = c^2$  to jedna z liczb  $a, b$  jest podzielna przez 3.
2. Na przeciwprostokątnej BC trójkąta prostokątnego ABC zbudowano po zewnętrznej stronie kwadrat BCDE. Niech O będzie środkiem tego kwadratu. Wykaż, że  $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CAO$ .
3. Dany jest czworościan foremny o boku  $a$ . Oblicz odległość między dwoma krawędziami tego czworościanu, zawierającymi się w prostych skośnych.

### LICEUM

1. Udowodnij, że jeżeli liczba  $1 + 3^n + 5^n$  jest pierwsza, to  $n$  jest podzielne przez 12.
2. W trójkącie  $ABC$  ( $AB < AC$ ) punkt  $X$  jest rzutem prostokątnym punktu  $B$  na dwusieczną kąta  $BAC$ . Punkty  $M$  i  $N$  są środkami odpowiednio boków  $AB$  i  $BC$ . Wykaż, że punkty  $M, X$  i  $N$  są współliniowe.
3. Wszystkie krawędzie prawidłowego ostrosłupa czworokątnego mają długość  $a$ . Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną poprowadzoną przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i środek wysokości ostrosłupa.