

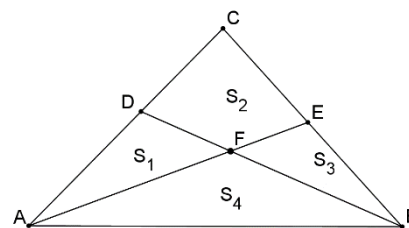


Zestaw 18

GIMNAZJUM

1. Trzęsienie ziemi zniszczyło tarczę zegara na wieży. Jedno pęknięcie biegnie od liczby 11 do liczby 3, drugie łączy liczby 1 i 8. Oba pęknięcia będą wzdłuż linii prostych. Jaki kąt tworzą te proste?

2. Trójkąt ABC podzielono na cztery figury o polach S_1, S_2, S_3, S_4 jak na rysunku obok. Czy jest możliwe, by liczby S_1, S_2, S_3, S_4 były równe? Odpowiedź uzasadnij.



3. Dla pewnej liczby naturalnej n ułamek $\frac{5n+6}{8n+7}$ jest skracalny. Przez jaką liczbę?

LICEUM

1. Udowodnij, że dla liczb rzeczywistych a, b, x zachodzi nierówność:

$$|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

2. W rozgrywkach ligi piłkarskiej wzięło udział $2n$ drużyn ($n \geq 2$) i odbyło się $2n - 1$ kolejek. W każdej kolejce każda drużyna rozegrała jeden mecz. Dowolne dwie drużyny spotkały się ze sobą podczas rozgrywek w dokładnie jednym meczu. Ponadto w każdym meczu jedna drużyna była gospodarzem, a druga — gościem. Drużynę nazwiemy podróżującą, jeżeli w dowolnych dwóch sąsiednich kolejkach była ona raz gospodarzem i raz gościem. Udowodnić, że istnieją co najwyżej dwie drużyny podróżujące.

3. Dany jest kwadrat ABCD. Punkt P leży na półprostej AB na zewnątrz odcinka AB. Punkt Q leży na półprostej BC na zewnątrz odcinka BC, jak na rysunku. Wykaż, że jeśli

$$AP = PQ + QC$$

to $\sphericalangle PDQ = 45^\circ$.

