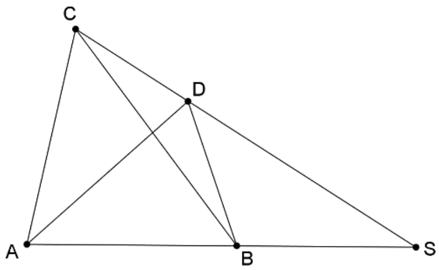
Zestaw 26

GIMNAZJUM



1. Dane są punkty A, B, C, D, przy czym $A \neq B$ oraz $C \neq D$ (zob. rysunek). Proste AB i CD przecinają się w punkcie S. Udowodnij, że

$$\frac{[ABC]}{[ABD]} = \frac{CS}{DS}$$

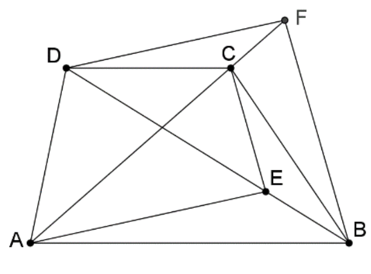
gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.

2. Niech $\max\{a, b\}$ oznacza nie mniejszą z liczb a, b, a $\min\{a, b\}$ oznacza nie większą z tych liczb. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzą równości:

a) $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ oraz b) $\min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$

3. Znajdź liczbę dziewięciocyfrową utworzoną z cyfr 1, … , 9 w taki sposób, że każda z tych cyfr występuje dokładnie raz i liczba utworzona z pierwszej cyfry jest podzielna przez 1, liczba utworzona z dwóch pierwszych cyfr jest podzielna przez 2, liczba utworzona z trzech pierwszych cyfr jest podzielna przez 3 itd.

LICEUM



1. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkt E należy do przekątnej BD. Prosta przechodząca przez punkt D i równoległa do prostej AE przecina prostą AC w punkcie F. Udowodnij, że proste BF i CE są równoległe.

2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c spełniona jest nierówność

$$|a + b - c| + |a - b + c| + |-a + b + c| \geq |a| + |b| + |c|$$

3. Udowodnij, że jeśli daną liczbę można przedstawić w postaci sumy kwadratów trzech liczb naturalnych, to jej trzykrotność można zapisać jako sumę kwadratów czterech liczb naturalnych.

Rozwiązania należy oddać do piątku 12 maja do godziny 12.10 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do piątku 12 maja do północy.