



## Zestaw 27

---

### GIMNAZJUM

1. W pewnym kraju jest skończona liczba miast, które połączono siecią dróg jednokierunkowych. Wiadomo, że każde dwa miasta łączy pewna droga jednokierunkowa. Udowodnij, że istnieje miasto, z którego można odbyć podróż do każdego innego miasta.
2. Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze  $p$ , że  $4p^2 + 1$  i  $6p^2 + 1$  są również liczbami pierwszymi.
3. Dane są dwa okręgi styczne zewnętrznie w punkcie A oraz prosta styczna do obu okręgów odpowiednio w punktach B i C. Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.

### LICEUM

1. Na płaszczyźnie danych jest  $n$  punktów. Każde trzy punkty są wierzchołkami trójkąta o polu  $\leq 1$ . Udowodnij, że wszystkie punkty leżą w pewnym trójkącie o polu  $\leq 4$ .
2. Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze  $p$ , że  $8p^2 + 1$  jest również liczbą pierwszą.
3. Na okręgu wybrano cztery kolejne punkty A, B, C, D. Środki łuków AB, BC, CD i DA oznaczono odpowiednio jako K, L, M, N. Udowodnij, że pole czworokąta KLMN równe jest połowie iloczynu długości jego przekątnych.