MISTRZOWIE MATEMATYKI

Zestaw 4

GIMNAZJUM

1. Dziadek ma dwa razy tyle lat, ile miała babcia wtedy, gdy dziadek miał tyle, ile babcia ma teraz. Razem mają 140 lat. Po ile lat liczy każde z nich?

2. Udowodnij, że każdą liczbę naturalną można przedstawić w postaci ilorazu kwadratu pewnej liczby naturalnej i sześcianu pewnej liczby naturalnej.

3. Rozszyfruj poniższy przykład na dodawanie, w którym jednakowym literom odpowiadają jednakowe cyfry, a różnym literom – różne cyfry (wystarczy podać rozwiązanie bez uzasadnienia, że jest ono jedynym).

```
     A B C D E E E
   + A F F F F H E H
  -----------------
   F H H A B C D H E
```

LICEUM

1. Na ile sposobów można n kul rozmieścić w n pudełkach tak, żeby dokładnie dwa pudełka zostały puste? Załóż, że $n \geq 3$ oraz zarówno kule jak i pudełka są między sobą rozróżnialne.

2. Dany jest prawidłowy ostrosłup czworokątny. Pole przekroju płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i równoległą do krawędzi bocznej skośnej względem tej przekątnej jest równe P. Pole przekroju płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich boków podstawy i środek wysokości ostrosłupa wynosi S. Oblicz iloraz $\frac{P}{S}$.

3. Dla jakich $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ liczby

$$\operatorname{tg}(x),\ 1,\ \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$$

w podanej kolejności są trzema początkowymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n)? Dla dowolnego $n \in N$ oblicz sumę $a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}$.

Rozwiązania należy oddać do piątku 9 października do godziny 10.35 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub swojemu nauczycielowi matematyki lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do piątku 9 października do północy.
