Zestaw 5

GIMNAZJUM

1. Na przedłużeniu przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC odłożono takie odcinki AD i BE, że $AD = AC$ i $BE = BC$. Wyznacz miarę kąta DCE.

2. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie

$$x \cdot y \cdot (x + 2015y) = 2015^{2016}$$

3. Punkt P jest dowolnym punktem wewnętrznym trójkąta równobocznego ABC. Odległości punktu P od boków BC, CA, AB są równe odpowiednie x, y, z. Wykaż, że dla danego trójkąta równobocznego $x + y + z$ jest wielkością stałą.

LICEUM

1. Liczby naturalne a, b, c, d spełniają równość $ab = cd$. Udowodnij, że liczba $a + b + c + d$ jest złożona.

2. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie oraz $ab + bc + ca = 1$, to $a + b + c \geq \sqrt{3}$

3. Rozwiąż równanie

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{\cos 2x} \quad \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{\sin 2x} = 1$$

Rozwiązania należy oddać do piątku 16 października do godziny 10.35 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub swojemu nauczycielowi matematyki lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do piątku 16 października do północy.

UWAGA! Zmianie ulega wysokość premii za oddanie rozwiązań jako pierwszy. Będą teraz to 2 punkty, a nie 5 jak dotychczas.

Projekt realizowany pod patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.