Zestaw 6

GIMNAZJUM

1. Udowodnij, że jeżeli liczby całkowite a, b, c, d spełniają warunek

$$a^2+b^2 = c^2 + d^2$$

to liczba $a + b + c + d$ jest liczbą parzystą.

2. Rozstrzygnij, czy szachownicę 8x8 z której usunięto pola A1 i H8 można pokryć kostkami domina, z których każde pokrywa dwa pola szachownicy i kostki na siebie nie zachodzą.

3. Punkt S leży wewnątrz sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Udowodnić, że suma pól trójkątów ABS, CDS, EFS jest równa połowie pola sześciokąta $ABCDEF$. Wskazówka: skorzystaj z rozwiązania jednego z zadań z zeszłego tygodnia.

LICEUM

1. Udowodnij, że zbiór $S = \{6n + 3 : n \in N\}$, gdzie N jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych, zawiera nieskończenie wiele kwadratów liczb całkowitych.

2. Sfera S_1 jest wpisana w sześcian, sfera S_2 jest styczna do wszystkich krawędzi tego sześcianu, a sfera S_3 jest opisana na tym sześcianie. Sprawdź, czy pola tych sfer tworzą ciąg geometryczny lub arytmetyczny.

2. Wykaż, że niezależnie od wartości parametru m równanie

$$x^3 - (m + 1)x^2 + (m + 3)x - 3 = 0$$

ma pierwiastek całkowity. Dla jakich m wszystkie pierwiastki rzeczywiste tego równania są całkowite?

Rozwiązania należy oddać do piątku 23 października do godziny 10.35 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub swojemu nauczycielowi matematyki lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do piątku 23 października do północy.
