Zestaw 14

GIMNAZJUM

1. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniające równanie:

$$x^4 = y^4 + 1223334444$$

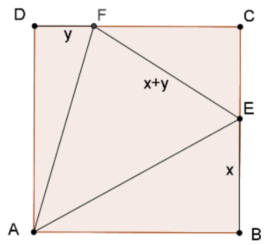
2. Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Na przeciwprostokątnej AB tego trójkąta wybrano takie punkty D i E, że zachodzą równości $AD = AC$ i $BE = BC$. Oblicz długość odcinka DE.

3. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a i b zachodzą nierówności:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

LICEUM

1. W kwadracie $ABCD$ wybieramy na boku BC taki punkt E, a na boku CD taki punkt F, że $|EF| = |BE| + |FD|$. Udowodnij, że kąt EAF ma 45°.



2. Pole powierzchni wielościanu opisanego na kuli o promieniu 1 wynosi 12. Oblicz objętość tego wielościanu.

3. Liczba rzeczywista x spełnia równanie $x^3 + 4x = 8$. Znajdź wartość wyrażenia $x^7 + 64x^2$.

Rozwiązania należy oddać do piątku 18 grudnia do godziny 10.35 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub swojemu nauczycielowi matematyki lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do piątku 18 grudnia do północy.

Projekt realizowany pod patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.