Zestaw 22

GIMNAZJUM

1. Udowodnij, że:

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=1$$

2. W kole o promieniu 10 wybrano 99 punktów. Dowieść, że wewnątrz koła istnieje punkt odległy od każdego z wybranych punktów o więcej niż 1.

3. Wiadomo, że prawdziwa moneta waży 10 gramów, a fałszywa 9 gramów. Mamy 5 monet o łącznej wadze 48 gramów i dysponujemy wagą elektroniczną. Wykonując ważenie możemy położyć ma wagę dowolną liczbę wybranych przez nas monet i odczytać ich łączną wagę. Czy wykonując nie więcej niż 3 ważenia możemy zawsze rozpoznać, które z danych monet są fałszywe, a które prawdziwe?

LICEUM

1. Dany jest sześciokąt wypukły ABCDEF o kątach przy wierzchołkach A, B, C, D równych odpowiednio 90°, 128°, 142°, 90°. Wykaż, że pole tego sześciokąta jest mniejsze niż $\frac{1}{2}\cdot|AD|^2$.

2. Dany jest równoległobok ABCD. Punkt E należy do boku AB, a punkt F do boku AD. Prosta EF przecina prostą CB w punkcie P, a prostą CD w punkcie Q. Wykaż, że pole trójkąta CEF jest równe polu trójkąta APQ.

3. W przestrzeni danych jest takich n punktów ($n>4$), że żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Każde dwa z tych punktów połączono odcinkiem niebieskim lub czerwonym. Udowodnij, że można tak wybrać jeden z tych kolorów, aby każde dwa punkty były połączone odcinkiem lub łamaną wybranego koloru.

Rozwiązania należy oddać do piątku 11 marca do godziny 10.35 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub swojemu nauczycielowi matematyki lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do piątku 11 marca do północy.

Projekt realizowany pod patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.