Zestaw 23

GIMNAZJUM

1. Danych jest 111 dodatnich liczb całkowitych. Wykaż, że spośród nich można wybrać 11 takich liczb, których suma jest podzielna przez 11.

2. Dla jakich liczb całkowitych dodatnich n liczba $14^n - 9$ jest pierwsza? Podaj wszystkie takie liczby.

3. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB oraz $\measuredangle ACB = 120°$. Udowodnij, że

$$CM \geq \frac{\sqrt{3}}{6} AB$$

LICEUM

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność

$$x^4 + y^4 > xy^3$$

2. Mamy dane 6 punktów w przestrzeni. Żadne cztery z nich nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów narysowano 10 odcinków. Wykaż, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.

3. W sześciokącie $ABCDEF$ każdy kąt ma 120° . Udowodnij, że symetralne odcinków AB, CD i EF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązania należy oddać do piątku 18 marca do godziny 10.35 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub swojemu nauczycielowi matematyki lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do piątku 18 marca do północy.

Projekt realizowany pod patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.