Zestaw 26

GIMNAZJUM

1. Liczby dodatnie a, b spełniają warunek

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab+3}$$

Wykaż, że co najmniej jedna z liczb a, b jest niewymierna.

2. W każde pole tablicy o wymiarach 4×4 wpisano liczbę 0 lub 1. Następnie obliczono sumy liczb stojących w każdym wierszu, w każdej kolumnie i na obu przekątnych. Wykaż, że co najmniej trzy sumy są jednakowe.

3. Punkt S leży wewnątrz sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Udowodnij, że suma pól trójkątów ABS, CDS, EFS jest równa połowie pola sześciokąta $ABCDEF$.

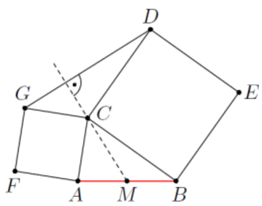
LICEUM

1. Wykazać, że jeśli liczby całkowite a, b, c spełniają równanie

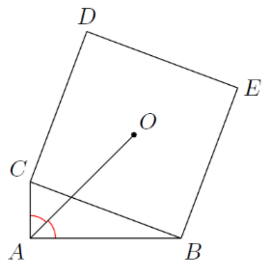
$$(a+3)^2 + (b+4)^2 - (c+5)^2 = a^2 + b^2 - c^2 ,$$

to wspólna wartość obu stron jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Na bokach BC i CA trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie kwadraty $BCDE$ oraz $CAFG$. Prosta przechodząca przez punkt C i prostopadła do prostej DG przecina odcinek AB w punkcie M. Udowodnić, że $AM = MB$.



3. Na przeciwprostokątnej BC trójkąta prostokątnego ABC zbudowano po zewnętrznej stronie kwadrat $BCDE$. Niech O będzie środkiem tego kwadratu. Wykazać, że $\measuredangle BAO = \measuredangle CAO$.



Rozwiązania należy oddać do piątku 15 kwietnia do godziny 10.35 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub swojemu nauczycielowi matematyki lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do piątku 15 kwietnia do północy.

Projekt realizowany pod patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.