Zestaw 27

GIMNAZJUM

1. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, że liczby $ab + bc, bc + ca, ca + ab$ są dodatnie. Udowodnij, że liczby a, b, c mają jednakowy znak, tzn. wszystkie są dodatnie lub wszystkie są ujemne.

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, przy czym $\measuredangle ACB = 60°$. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykazać, ze trójkąt DEM jest równoboczny.

3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC > BC$. Punkt P jest rzutem prostokątnym punktu B na dwusieczną kąta ACB. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Wiedząc, że $BC = a, CA = b, AB = c$, oblicz długość odcinka PM.

LICEUM

1. Znajdź taką najmniejszą liczbę naturalną n, aby liczby $n + 1$ oraz $n - 50$ były kwadratami liczb naturalnych.

2. Wykaż, że dla $a \in R \quad a^8 + a^2 + 1 > a^5 + a$

3. Na tablicy napisano słowo $abdc$. W jednym ruchu możemy dopisać lub usunąć (na początku, w środku lub na końcu) palindrom parzystej długości utworzony z liter a, b, c, d. Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie ruchów możemy uzyskać słowo $bacd$. (Uwaga: Palindromem nazywamy słowo, które czytane od lewej do prawej jest takie samo jak czytane od prawej do lewej, np. $abba$, cc, $daaaad$.)

Rozwiązania należy oddać do piątku 22 kwietnia do godziny 10.35 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub swojemu nauczycielowi matematyki lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do piątku 22 kwietnia do północy.

Projekt realizowany pod patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.