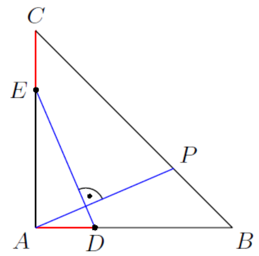
## Zestaw 30

### GIMNAZJUM

1. Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano na niebiesko lub czerwono. Udowodnij, że istnieje trójkąt prostokątny równoramienny, którego wierzchołki są tego samego koloru.

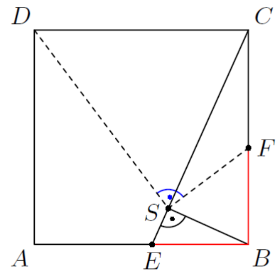
2. Znajdź wszystkie liczby całkowite $n$ takie, że $\frac{5n+2}{2n+3}$ jest liczbą całkowitą.

3. Dany jest trójkąt $ABC$, w którym $\measuredangle A = 90°$ oraz $AB = AC$. Punkty $D$ i $E$ leżą odpowiednio na bokach $AB$ i $AC$, przy czym $AD = CE$. Prosta przechodząca przez punkt $A$ i prostopadła do prostej $DE$ przecina bok $BC$ w punkcie $P$. Wykaż, że $AP = DE$.




### LICEUM

1. Punkty $E$ i $F$ leżą odpowiednio na bokach $AB$ i $BC$ kwadratu $ABCD$, przy czym $BE = BF$. Punkt $S$ jest rzutem prostokątnym punktu $B$ na prosta $CE$. Wykaż, że $\measuredangle DSF = 90°$.




2. Dane są różne dodatnie liczby wymierne $x$ i $y$, dla których liczba

$$w = \frac{x + \sqrt{y}}{y + \sqrt{x}}$$

jest wymierna. Wykazać, że obie liczby $x$ i $y$ są kwadratami liczb wymiernych.

3. Wykaż, że jeżeli α jest kątem ostrym, to

$$\frac{\frac{1}{(1-\sin\alpha)^2} - \frac{1}{(1+\sin\alpha)^2}}{\frac{1}{(1-\cos\alpha)^2} - \frac{1}{(1+\cos\alpha)^2}} = \mathrm{tg}^5\alpha$$

*Rozwiązania należy oddać do piątku 20 maja do godziny 10.35 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub swojemu nauczycielowi matematyki lub przesłać na adres [jareksz@interia.pl](mailto:jareksz@interia.pl) do piątku 20 maja do północy.*

Projekt realizowany pod patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.