Zestaw 31

GIMNAZJUM

1. Wyznacz wszystkie takie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, że liczba $a + b$ jest liczbą pierwszą oraz liczba $a^3 + b^3$ jest podzielna przez 3.

2. Czy istnieje taki wielościan, którego rzuty prostokątne na pewne trzy płaszczyzny są odpowiednio czworokątem, sześciokątem i ośmiokątem? Odpowiedź uzasadnij.

3. Wskazówki zegara pokrywają się o godzinie 12:00, w tej samej pozycji znajdą się po 12 godzinach. Ile razy w międzyczasie (nie licząc pokryć o godzinie 12:00 w południe i o północy) pokryją się?

LICEUM

1. Ostrosłup prawidłowy sześciokątny przecięto płaszczyzną, która przecina wszystkie jego krawędzie boczne. W przekroju otrzymano sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Wykaż, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

2. W trójkącie ABC dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Długości boków BC i AC są równe odpowiednio a i b, a długość odcinka CD jest równa d. Wykaż, że

$$d < \frac{2ab}{a+b}$$

3. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b mają tę własność, że liczba $\frac{a-b}{a+b}$ jest wymierna. Udowodnij, że liczba $\frac{2a-b}{2a+b}$ też jest wymierna

Rozwiązania należy oddać do środy 25 maja do godziny 15.00 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub swojemu nauczycielowi matematyki lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do piątku 27 maja do północy.

Projekt realizowany pod patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.